Романчук Л.А.
кандидат філологічних наук, заступник директора,
ФОП «Дмитро Щитов»
Мормуль М.Ф.
кандидат технічних наук, доцент,
Університет митної справи та фінансів
Щитов Д.М.
кандидат економічних наук, докторант,
Університет митної справи та фінансів
Щитов О.М.
кандидат фізико-математичних наук, доцент, викладач,
НКВ-Ліцей № 100

DOI: https://doi.org/10.36059/978-966-397-573-3-15

МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ ПОПУЛЯЦІЙ ХИЖАКІВ І ЖЕРТВ

Підтримка екологічної рівноваги є ключовим завданням біології та екології, особливо в контексті відновлення популяцій після військових конфліктів. У біоценозах хижаки відіграють важливу роль у регулюванні чисельності інших видів, запобігаючи їхньому неконтрольованому розмноженню і забезпечуючи стабільність екосистем. Втрата хижаків, зумовлена зміною середовища, браконьєрством, урбанізацією чи кліматичними змінами, може призвести до порушення трофічної сітки та деградації ландшафтів. Природні екосистеми здатні самостійно регулювати чисельність популяцій через конкуренцію, обмежені ресурси, територіальні фактори та взаємодії між видами. Однак антропогенний вплив, зокрема війни, часто порушує цей баланс і може спричинити різке скорочення популяцій, що вимагає активного втручання для їх відновлення.

У такому контексті важливо застосовувати модифіковані математичні моделі, які враховують зміни швидкості відтворення популяцій хижаків в залежності від доступних ресурсів та рівня внутрішньовидової конкуренції. Такий підхід є особливо важливим для відтворення екосистем після військових дій в Україні, де екологічний стан потребує значного відновлення для забезпечення стійкості природних середовищ.

Нехай $v'(\tau)$ – загальна кількість жертв певного виду, молодших за вік τ, яких один хижак здатний зловити та з'їсти за рік (мисливські здібності);

T_1 – максимальна тривалість існування особин виду-жертви;

T_2 – максимальна тривалість існування особин виду-хижака;

$S'(\tau, \ i)$ – коефіцієнт природної смертності жертв віком $\leq \tau$ за i-й інтервал;

$S''(\tau, i)$ – коефіцієнт природної смертності хижаків віком $\leq \tau$ за i-й інтервал (очевидно, що коефіцієнт смертності $S''(\tau, i)$ набуває значень у діапазоні [0, 1], де 0 означає повну відсутність смертності в заданій віковій групі , а 1 – повне вимирання цієї групи протягом i-го інтервалу часу. Для спрощення припустимо, що коефіцієнт смертності однаковий на всіх інтервалах року, тобто залежить лише від віку особин. Тобто $S''(\tau, i) = S''(\tau)$, $S'(\tau, i) = S'(\tau)$;

$a'(\tau)$ – коефіцієнт народжуваності жертв: відсоток нащадків, народжених особинами у віці не більше τ протягом певного часового відрізка;

$a''(\tau)$ – коефіцієнт народжуваності хижаків: відсоток нащадків, народжених особинами у віці не більше τ протягом певного часового відрізка;

$b'(T_1)$ – сумарні втрати популяції жертв (сумарний негативний вплив) за час T_1 (загибель як від природної смертності і хвороб, так і від хижацтва: $b'(T_1) = S'(T_1) + v'(T_1)$);

$b''(T_2)$ – сумарні втрати популяції хижаків (сумарний негативний вплив) за час T_2 (загибель від природної смертності чи хвороб);

$d''(\tau)$ – параметр насичення одного хижака віку до τ (необхідна кількість здобичі для виживання протягом року);

$S'''(\tau)$ – коефіцієнт смертності хижаків віком $\leq \tau$ від голоду (тобто браку здобичі): $S'''(\tau) = k \cdot \max\{0; (d'(\tau) - v'(T_1))\}$; де k – коефіцієнт травлення ($k < 1$);

$y_n(T_1)$ – чисельність всієї популяції жертв на n-му відрізку часу;

$y_n(\tau)$ – чисельність популяції жертв віком $\leq \tau$ на n-му відрізку часу;

$x_n(\tau)$ – чисельність популяції хижаків віком $\leq \tau$ на n-му відрізку часу;

$x_n(T_2)$ – чисельність всієї популяції хижаків на n-му відрізку часу.

Ці дані отримуються емпірично, польовим шляхом.

Задача полягає у побудові моделі динаміки розвитку двох популяцій, яка враховує зміну темпів відтворення в залежності від наявних ресурсів та інтенсивності внутрішньовидової конкуренції.

Припускаємо, що характеристики виду залежать від поточної щільності популяції та стану середовища (їжі, погодних умов тощо).

Чисельність особин $y_{n+1}(\tau + 1)$ обчислюється за формулою:

$$y_{n+1}(\tau + 1) = y_n(\tau) - S'(\tau) \cdot y_n(\tau) - v'(\tau) \cdot x_n(T_2) + a'(T_1). \qquad (1)$$

В результаті перетворень отримано:

$$y_{n+1}(\tau + 1) = y_n(\tau) \cdot (1 - S'(\tau)) - v'(\tau) \cdot x_n(T_2) + a'(T_1) \qquad (2)$$

з крайовими умовами $y_n(0) = 0; S'(\tau) < 1; v'(\tau) < 1$.

Потомство жертв становитиме: у дискретній моделі $a'(T_1) = \sum_{\tau=1}^{T_1} a'(\tau)$,

у неперервній $a'(T_1) = \int_1^{T_1} a'(\tau) d\tau$.

Для більш точного розрахунку динаміки популяцій слід враховувати: 1) зовнішні негативні впливи (погодні умови, полювання, браконьєрство, пожежі, повені, тощо); 2) місткість середовища *K* (щільнісну регуляцію), за якої зменшується народжуваність, коли кількість осіб наближається до *K*.

Враховуючи це і підставляючи рекурентні формули $i = 0, n$, отримуємо

$$y_n(\tau) = y_0(\tau) \cdot (1 - S'(\tau))^n - v'(\tau) \sum_{i=0}^{n-1} x_i(T_2) + n \cdot a'(T_1) \cdot \left(1 - \frac{y_n(T_1)}{K}\right) \quad (3)$$

Для хижаків:

$$x_n(\tau) = x_0(\tau) \cdot (1 - S''(\tau))^n + n \cdot (a''(T_2) - k \cdot \max\{0; (d''(\tau) - v'(\tau))\}). \quad (4)$$

Модель апробовано на популяціях диких кроликів і лисиць Дніпровсько-Орільського заповідника. Притаманні цим видам властивості зібрані у табл. 1.

Таблиця 1

Характеристики видів кроликів та лисиць за віком

Вид / Вік	Кролики						Лисиці					
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Параметри												
Фертильність $a'(\tau)$ і $a''(\tau)$	0	3	10	12	6	0	0	3,6	6,2	6,2	6,2	2,5
Ймовірності виживання p_i	0.4	0,6	0,6	0,5	0,4	0,3	0,5	0,77	0,87	0,82	0,67	0,47
Початкова кількість	0	20	40	60	20	0	0	5	10	10	5	2
Поїдання $v'(\tau)$ / Параметр насичення $d''(\tau)$	0,2	0,2	0,3	0,2	0,3	0,5	9	12	12	12	10	1

Смертність $S_i = 1 - p_i$.

Коефіцієнт травлення у лисиць – $k = 0{,}055$.

У кроликів логістичне обмеження (місткість середовища) $K = 500$.

Результати показали, що популяція кроликів зростає на початку, але з часом стабілізується через обмеження ресурсів (місткість середовища) та вплив лисиць. Популяція лисиць зростає через доступність їжі (кроликів), але з часом популяція лисиць стабілізується через обмеження їжі та інші фактори. Зміни в чисельності обох популяцій демонструють взаємодію між хижаками та жертвами, де популяція кроликів безпосередньо впливає на чисельність лисиць, а лисиці, у свою чергу, регулюють кількість кроликів (рис. 1).

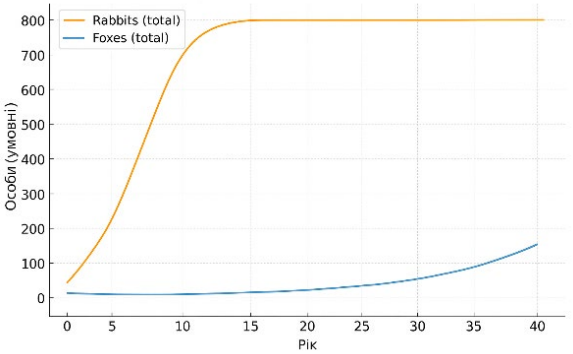


Рис. 1. Динаміка взаємодії популяцій жертви-хижаки

Множник фертильності кроликів поступово зменшується у міру наближення популяції до ємності середовища, обмежуючи народжуваність. У той час як множник фертильності лисиць коливається відповідно до доступності здобичі (рис. 2). За віковими класами динаміку розвитку популяцій відображено на рис. 3.

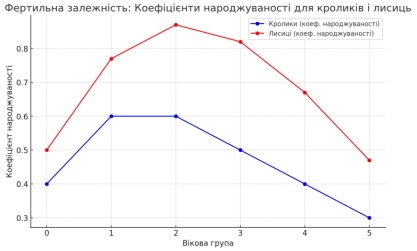


Рис. 2. Динаміка фертильності

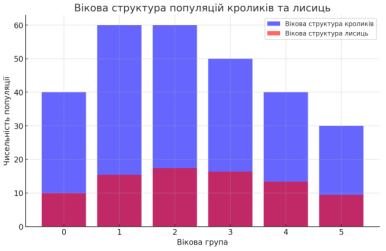


Рис. 3. Вікова структура популяцій

Система збіжна до стаціонарного режиму без коливань. Надалі ця модель може бути розширена включенням до системи додаткових факторів (ресурсна база, просторові ефекти, міграції, стохастичні збурення, негативні впливи) та введенням другорядних трофічних груп. Сферами її застосування можуть бути: мисливські господарства, екологічний менеджмент на промислових об'єктах, програми відновлення втрачених (вимерлих чи мігруючих) ланок трофічного ланцюга.

Список використаних джерел:

1. Капустян М. С. Моделювання динаміки чисельності популяцій з урахуванням затримки у часі, 2020. URL: https://ekmair.ukma.edu.ua/server/api/core/bitstreams/
2. Romanchuk Lyubov, Shchytov Dmytro, Mormul Mykola, Shchytov Olexandr. Mathematical modeling of the dynamics of biological system development. *Science and education as the basis for the modernization of the world order*: 2024. Book 35. Part 1. С. 137–164. DOI: https://doi.org/10.30890/2709-2313.2024-35-00-004
3. Романчук Л. А., Мормуль М. Ф., Щитов О. М. (2023). Математичне моделювання взаємин біологічних систем з урахуванням смертності та народжуваності. *The level of development of science and technology in the XXI century '2023*. Karlsruhe. Book 22, part 1. С. 72-86. DOI: https://doi.org/10.30890/2709-2313.2024-28-00-021